НПО УЧЕБНОЙ ТЕХНИКИ «ТУЛАНАУЧПРИБОР»

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ФВЛ-2

ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.

Тула, 2012 г.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА.
ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.

Цель работы: моделирование нормального распределения случайной величины на примере измерения сопротивлений резисторов; освоение методики статистической обработки результатов прямых измерений случайной величины; получение навыков составления статистических рядов и оценки достоверности результатов измерений; ознакомление с методом наименьших квадратов.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ.
Понятие вероятности.

В научных исследованиях, технике и массовом производстве часто приходится встречаться с явлениями, которые при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта в неизменных условиях протекают каждый раз несколько по-разному. Такие явления называются случайными, и их общие закономерности изучаются с помощью математической теории вероятностей.

Результат отдельного испытания (опыта) в теории вероятностей принято называть *событием*. Событие, исход которого нельзя заранее предсказать, называется *случайным*. Примерами случайных событий могут служить: 1) попадание в цель при выстреле из орудий; 2) появление герба при бросании монеты; 3) появление определенной погрешности при измерении физической величины; 4) получение молекулой определенной скорости при хаотическом движении и т. д.

Количественной оценкой возможности появления данного события является его *вероятность*.

Вероятностью P_A случайного события A называется постоянное число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний n, то есть:

$$P_{\mathrm{A}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{\mathrm{A}}}{n} \qquad \textbf{(1.1)}$$

где n – общее число опытов-испытаний; n_A – число появлений события A в n испытаниях.

Например, при бросании монеты вероятность появления герба равна ½, т. к. при большом числе бросаний примерно в половине случаев выпадает герб.

Согласно приведенному выше определению, вероятность можно приближенно оценить по результатам данной серии опытов, проведя конечное число опытов n (желательно, чтобы n было большим).

Однако само существование вероятности не зависит от того, производятся опыты или нет. Поэтому можно дать другое определение вероятности события, исключающее необходимость проведения опыта.

Для этого рассмотрим следующий пример. Пусть имеется урна, в которой лежат тщательно перемешанные 10 шаров, отличающихся друг от друга только цветом: 5 шаров белых, 3 черных и 2 красных. Какова вероятность того, что, не глядя, мы вытащим из урны шар определенного цвета?

Очевидно, что мы имеем 5 шансов из 10 вытянуть белый шар, 3 из 10 – черный и 2 из 10 – красный. Другими словами, вероятности вытянуть белый, черный и красный шары равны соответственно 5/10, 3/10, 2/10.

Действительно, если попробовать много раз осуществить соответствующий опыт, то можно убедиться что примерно в 50% всех извлечений будет вытянут белый, в 30% – черный и в 20% – красный шар.

Таким образом, **вероятность** некоторого **события можно определить как отношение числа равновозможных исходов, благоприятных для данного события, к общему числу равновозможных исходов**.

Вероятность P любого события есть правильная дробь, то есть $0 \le P \le 1$. При этом вероятность достоверного события, то есть события, осуществляющегося при любом исходе опыта, равна 1, вероятность же невозможного события равна нулю.

Обычно на практике интерес представляют опыты, которые могут иметь несколько различных исходов. Каждому опыту такого рода отвечает определенная таблица вероятностей:

События (исходы опыта)	A_1	A_2	…	A_K
Вероятности	P_1	P_2	…	P_K

Так, например, описанному выше опыту по извлечению из урны шара определенного цвета отвечает таблица 1.

Таблица 1

A_1	A_2	A_3
1/2	3/10	1/5

Обозначено: A_1 – извлечение белого шара; A_2 – черного; A_3 – красного.

Опытам по бросанию игральной кости отвечает таблица 2.

Таблица 2

События (выпавшее число очков)	1	2	3	4	5	6
Вероятности	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Сравнивая таблицы 1 и 2, можно отметить существенное различие между ними: в таблице 2 события записаны с помощью чисел. В этом случае можно сказать, что число очков, выпадающих при бросании кости, является примером *случайной величины*, могущей принимать то или иное значение в зависимости от случая.

Случайная величина может быть дискретной, возможные значения которой могут быть пронумерованы (например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа) или непрерывной, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал числовой оси (например, результаты измерения толщины пластинки микрометром или скорость молекулы газа).

Закон распределения случайной величины. Плотность вероятности. Гистограмма.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями этой величины и соответствующими вероятностями.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

X	X_1	X_2	…	X_n
P	P_1	P_2	…	P_n

Такая таблица называется *рядом распределения* случайной величины (пример такого ряда приведен в таблице 2).

Непрерывная случайная величина имеет бесчисленное множество возможных значений, поэтому вероятность того, что она примет какое-то определенное значение, равна нулю.

В этом случае можно ввести вероятность dP того, что численное значение величины будет заключено в пределах от x до $x + dx$. Эта вероятность будет равна частоте появления величины в заданном интервале при условии, что число измерений n достаточно велико, то есть $dP = \frac{dn}{n}$, где dn – число попаданий величины в интервал значений $x \div x + dx$.

Очевидно, величина вероятности dP пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала, то есть $dP = a \cdot dx$, где a – коэффициент пропорциональности. Ясно также, что dP зависит от самого значения x, так как число попаданий величины в одинаковые интервалы вблизи различных значений будет неодинаково, то есть $a = f(x)$. Таким образом:

$$dP = f(x) \cdot dx. \qquad (1.2)$$

Функция $f(x)$ называется плотностью вероятности.

Зависимость плотности вероятности от x можно изобразить графически на основе результатов опыта, исходя из того, что:

$$f(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{dn}{n \cdot dx} \qquad (1.3)$$

Для этого:

- весь диапазон имеющихся значений случайной величины x разбивают на некоторое число равных интервалов Δx;
- подсчитывают число измерений Δn_i, попадающих в каждый интервал;
- находят отношение $\frac{\Delta n_i}{n \cdot \Delta x}$. Это отношение представляет собой среднюю плотность вероятности $\langle f(x) \rangle$ для интервала $x_i \div x_i + \Delta x$:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\Delta n_i}{n \cdot \Delta x} \tag{1.4}$$

Если на осях координат отложить <f(x)> в зависимости от x, то получится ступенчатая кривая, называемая г и с т о г р а м м о й (см. рис. 1).

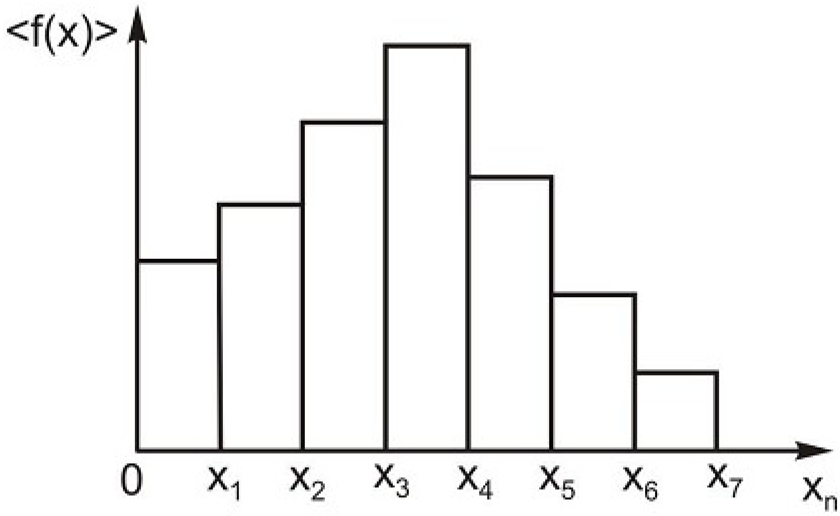

Рис. 1. Гистограмма распределения

Если увеличивать число измерений случайной величины и одновременно увеличить число интервалов, делая их все более мелкими, то для достаточно большого набора значений $\langle f(x) \rangle$ полученная гистограмма будет приближаться к графику функции плотности вероятности. На рис. 2 изображены примеры функций плотности вероятности случайной величины. Вероятность dP = f(x)·dx численно равна площади заштрихованной фигуры.

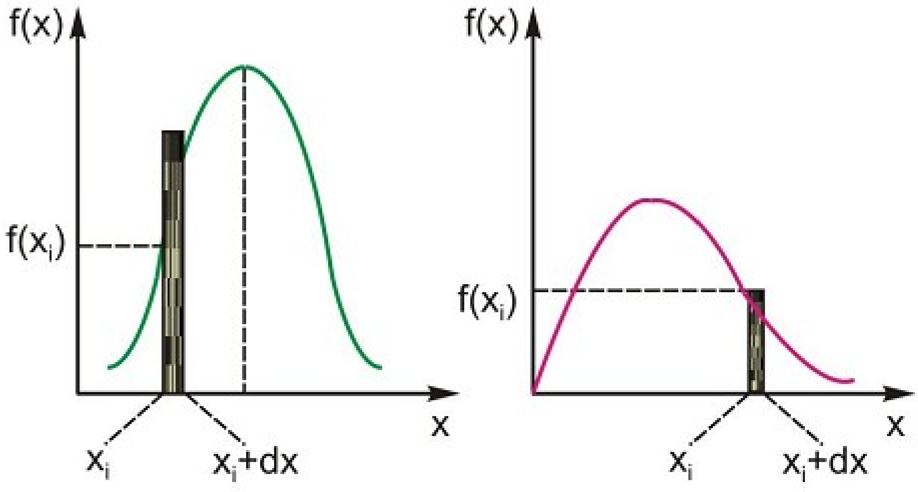

Рис. 2. Распределения плотности вероятности

Числовые характеристики случайной величины – параметры распределения

Для того, чтобы в сжатой форме выразить наиболее существенные особенности того или иного распределения, вводятся числовые характеристики случайной величины. Наиболее существенными характеристиками являются математическое ожидание и дисперсия.

Пусть дан ряд распределения случайной величины x:

Таблица 3

x	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \tag{1.5}$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{1.6}$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

В некоторых случаях математическое ожидание точно совпадает со средним значением $\langle x \rangle$ случайной величины. Например, рассмотрим статистический ряд:

Таблица 4

x	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p	p	p	p

В данном случае вероятности появлений событий x_1, x_2, …, x_n равны $p_1=p_2=p_3= \ldots =p_n=p$.

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X=x_1$, $X=x_1$, $X=x_1$, … , $X=x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = n \cdot p = 1 \tag{1.7}$$

Тогда из (1.6) получим:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \langle x\rangle \tag{1.8}$$

Выше мы рассмотрели ряд таблицы 4, в котором появление событий x_1, x_2, …, x_n равновероятно и получили результат $M(X)=\langle x\rangle$.

Однако, в теории математической статистики доказывается, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины для любой полной группы событий, т. е. $M(X)\approx\langle x\rangle$ (тем точнее, чем больше число испытаний n).

Для непрерывной случайной величины x с плотностью вероятности $f(x)$ среднее значение равно:

$$\langle x\rangle = \int x\cdot f(x)\cdot dx, \tag{1.9}$$

где интегрирование проводится по всем значениям x.

Мерой отклонения наблюдаемых значений от среднего (мерой рассеяния) служит величина, называемая д и с п е р с и е й.

Дисперсия σ^2 равна среднему арифметическому из квадратов отклонений величин x_i от их среднего, то есть:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2}{n}. \tag{1.10}$$

Корень квадратный из дисперсии σ называется средним квадратичным отклонением случайной величины:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2}{n}}. \tag{1.11}$$

Нормальное распределение. Функция Гаусса.

Многие случайные величины распределяются по так называемому нормальному закону, найденному Гауссом.

Этот закон распределения имеет место в тех случаях, когда влияющие на случайную величину факторы могут вносить с равной вероятностью как положительные, так и отрицательные отклонения от среднего значения случайной величины. Например, разброс случайных ошибок при многократных измерениях любой величины подчиняется закону Гаусса.

Функция Гаусса имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \tag{1.12}$$

где $f(x)$ – плотность вероятности; σ^2 – дисперсия; $<x>$ – среднее значение случайной величины; e – основание натуральных логарифмов.

Величины σ^2 и $<x>$ являются параметрами этого распределения.

График плотности вероятности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). На рис. 3 представлено семейство нормальных кривых (гауссианов), соответствующих различным параметрам.

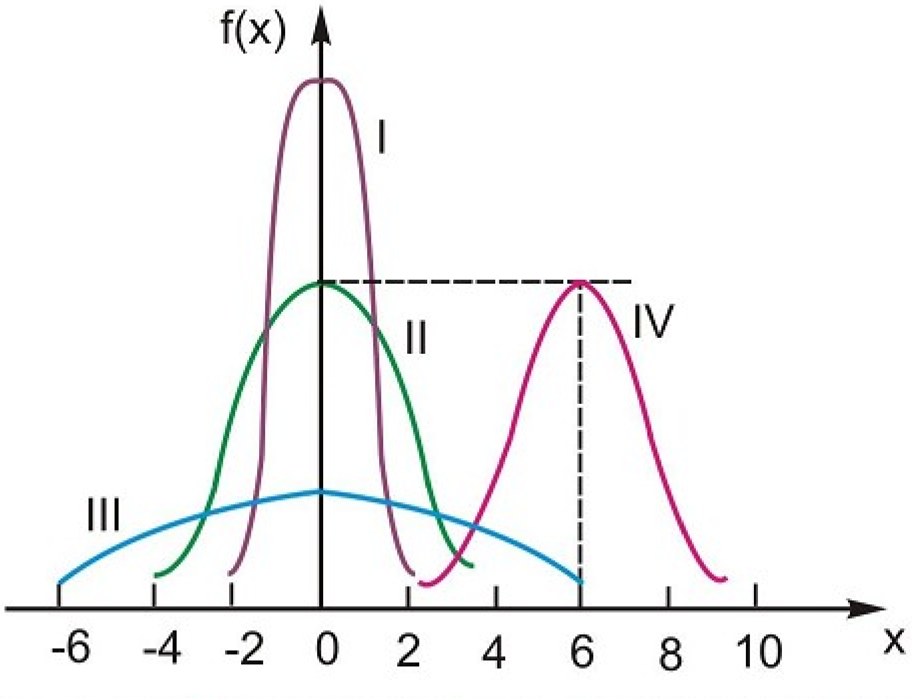

Рис. 3. Графики функций Гаусса. Параметры кривых:

I – <x> = 0, σ = 0.4

II – <x> = 0, σ = 1

III – <x> =0, σ = 2.5

IV – <x> = 6, σ = 1

Отметим некоторые свойства нормальной кривой:

1. Кривая симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x = \langle x \rangle$, и имеет в этой точке максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
2. Изменение $\langle x \rangle$ при постоянном σ не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс.
3. При изменении среднего квадратичного отклонения σ кривая изменяет свой вид, становясь все более островершинной с уменьшением σ (см. рис. 3).
4. Площадь под кривой, равная вероятности того, что случайная величина принимает какое-либо значение в интервале от $-\infty$ до $+\infty$, всегда равна единице, то есть:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1. \tag{1.13}$$

Математическая обработка результатов эксперимента по методу наименьших квадратов.

На практике часто целью измерений является установление вида некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$, где x — независимая переменная, а y - зависимая переменная. В эксперименте одновременно определяются как значения x, так и соответствующие им значения y, а задачей является установление математической модели исследуемой зависимости – подборе аналитической функции, наилучшим образом описывающей экспериментальные данные.

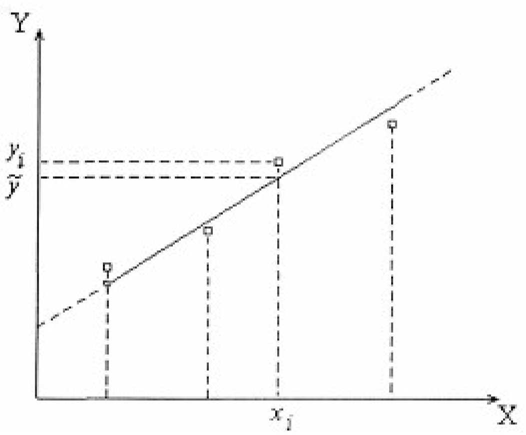

Рис. 4. Построение линейной регрессии методом наименьших квадратов.

Искомая математическая модель функциональной зависимости может быть найдена лишь в результате совместной обработки всех полученных значений x и y. Задача выбора вида функциональной зависимости (эмпирической формулы) - задача не формализуемая, так как одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями. Иногда эмпирическую формулу удается выбрать, исходя из физического смысла в виде линейной зависимости, экспоненциальной или логарифмической функции и т. п., то есть в виде компактного и содержательного выражения, где параметры имеют определенный смысл (интерпретируемы). После того как выбран вид функции-модели, с помощью которой пытаются описать экспериментальные результаты, должны быть найдены параметры, входящие в эту формулу (a, b и т. д.).

Основной способ нахождения этих параметров - метод наименьших квадратов (МНК), хотя он не является единственным.

Пусть после предварительного анализа была выбрана линейная модель вида y=a·x+b. Теперь задача состоит в том, чтобы найти наилучшие значения параметров модели a и b. Нам известны значения x_i и y_i - конкретные числа, полученные в опытах (рис. 4). Для определения неизвестных параметров можно составить систему условных линейных уравнений, каждое из которых имеет вид:

$$y_i = a \cdot x_i + b, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (2.1)$$

Система уравнений (2.1) при n-кратных измерениях может быть избыточной, если n > 2 и, вообще говоря, несовместна, т. к. результаты измерений величин x и y неизбежно содержат ошибки. Поэтому из этих уравнений можно определить лишь оценки искомых параметров А и В, которые являются случайными величинами.

Будем считать, что все пары экспериментальных значений x_i, y_i равновероятны (т. е. измерения равноточны), случайные ошибки величин x и y распределены по нормальному закону, а систематическими ошибками можно пренебречь. Между рассчитанными по модели значениями и экспериментальными отсчетами y будут наблюдаться отклонения. Введем для них обозначение:

$$\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - \left(A \cdot x_i + B\right). \qquad (2.2)$$

Математики Лежандр и Гаусс показали, что оценки параметров А и В будут наиболее вероятными, если сумма квадратов отклонений по всем точкам n будет наименьшей:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 \to \min \qquad (2.3)$$

Минимум этой суммы находится по правилам дифференциального исчисления: условием минимума функции является обращение в нуль частных производных функции Q по независимым переменным A и B:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0. \qquad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.4), получаем:

$$\begin{cases} A \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot B - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \\ B \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + A \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Решая эту систему уравнений относительно параметров *A* и *B*, находим:

$$A = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}. \qquad (2.6)$$

Если разделить числитель и знаменатель уравнения (2.6) на n^2, то после несложных преобразований можно выразить коэффициент A через средние значения величин, входящих в эти уравнения. Тогда получим:

$$A = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \qquad (2.7)$$

где $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\langle y \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$, $\langle x \cdot y \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ – арифметические значения соответствующих величин.

Из уравнения (2.1), рассчитав параметр A, можно найти параметр B.

$$B = \langle y \rangle - A \cdot \langle x \rangle \qquad (2.8)$$

Нахождение искомых оценок A и B по уравнениям (2.7) и (2.8) удобно при ручном счете на микрокалькуляторах или на ЭВМ.

Теория дает возможность определить также дисперсию (рассеяние, отклонение экспериментальных точек от модельной прямой) и дисперсию коэффициентов *A* и *B*.

Если обозначить S_0^2 - дисперсию точек, S_A^2 и S_B^2 - дисперсии коэффициентов A и B, то

$$S_0^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \left\{ \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 - \frac{\left[\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle \right]^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \right\}, \qquad (2.9)$$

$$S_A^2 = \frac{S_0^2}{n \cdot \left[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right]}, \qquad (2.10)$$

$$S_B^2 = S_A^2 \cdot \langle x^2 \rangle. \qquad (2.11)$$

Интервалы, в которых с доверительной вероятностью α могут находиться коэффициенты a и b, записываются в виде:

$$A - t_{\alpha,n-2} \cdot S_A \le a \le A + t_{\alpha,n-2} \cdot S_A,$$
$$B - t_{\alpha,n-2} \cdot S_B \le b \le B + t_{\alpha,n-2} \cdot S_B \qquad (2.12)$$

где $t_{\alpha,n-2}$ - коэффициент Стьюдента.

Таким образом, можно записать:

$$a = A \pm t_{\alpha,n-2} \cdot S_A \qquad (2.13)$$
$$b = B \pm t_{\alpha,n-2} \cdot S_B \qquad (2.14)$$

Таблица коэффициентов Стьюдента

Таблица 5

N \ α	0.2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	0.32	1.00	1.38	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.6	636.6
3	0.29	0.82	1.06	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.28	0.76	0.98	1.2	1.6	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.27	0.74	0.94	1.2	1.5	2.1	2.8	3.7	4.5	8.6
6	0.27	0.73	0.92	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	0.26	0.72	0.91	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	0.26	0.71	0.90	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	0.26	0.71	0.89	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.8
11	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	0.26	0.70	0.88	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.4
13	0.26	0.70	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	0.26	0.69	0.87	1.1	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	4.2
15	0.26	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	0.26	0.69	0.87	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.1
17	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	0.26	0.69	0.86	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
50	0.25	0.68	0.86	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
100	0.25	0.67	0.85	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	0.25	0.67	0.85	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

Для нахождения доверительных интервалов $\Delta_A = t_{\alpha,n-2} \cdot S_A$; $\Delta_B = t_{\alpha,n-2} \cdot S_B$ входящих в формулы (2.13), (2.14) надо сначала по таблице 5 найти значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,\ n-2}$ где α обычно выбирают 0,7; N=n−2, где n – количество измерений (экспериментальных точек).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.

Приборы и оборудование.

Лабораторная работа состоит из нескольких частей и выполняется на комбинированной учебной установке ФВЛ-2.

1) В первой части лабораторной работы осуществляется расчет функции распределения случайной величины (сопротивления резистора) в предположении, что это распределение является нормальным, или гауссовым. Технология изготовления резисторов в большую или меньшую сторону от среднего значения равновероятны, и малые отклонения более вероятны, чем большие.

Это позволяет считать, что сопротивления резисторов одинакового номинала, взятых из одной партии, распределены по нормальному закону. Для измерения сопротивлений используется стандартный цифровой прибор (мультиметр) с малой погрешностью измерений.

2) Во второй части лабораторной работы случайной величиной является частота встроенного генератора, измеренная с помощью встроенного в учебный комплекс цифрового частотомера. Частота генератора может изменяться ручкой «ЧАСТОТА». В данном случае вид функции распределения может отличаться от нормального (функции Гаусса) из-за алгоритма работы АЦП прибора для измерения частоты, представляющего собой фактически цифровой счётчик импульсов. Для измерения частота генератора следует нажимать кнопку «ИЗМЕРЕНИЕ». Сигнал с генератора может быть подан на осциллограф (выход «СИГНАЛ» учебной установки).

3) В третье части работы предлагается получить вольт-амперную характеристику линейного резистора с постоянным сопротивлением R, выражаемую законом Ома:

$$I(U)=\frac{U}{R} \tag{3.1}$$

Обработку экспериментальных данных следует провести методом наименьших квадратов и получить оценку A для коэффициента наклона прямой a. Действительно, перепишем (3.1) в эквивалентном виде:

$$U(I)=R\cdot I \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.2) с уравнением (2.1) прямой линии найдем, что $U=y$; $R=a$; $I=x$. Тем самым, находя оценку A коэффициента наклона прямой линии, фактически численным методом наименьших квадратов мы рассчитываем значение сопротивления резистора $\boldsymbol{R}$.

Ручка «ТОК РЕЗИСТОРА» позволяет изменять ток, протекающий через данный линейный элемент цепи. Для измерения тока через резистор и напряжения на резисторе следует нажимать кнопку «ИЗМЕРЕНИЕ». При этом измеренные значения выводятся на LCD ЖКД индикатор учебного прибора.

Переключение между режимом «ЧАСТОТОМЕР» (второй эксперимент) и «ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА» (третий эксперимент) осуществляется нажатием кнопки «ЭКСПЕРИМЕНТ».

Порядок выполнения.

1. Перед включением следует проверить целостность всех соединительных и сетевых проводов устройств. Разобраться в назначении ручек, кнопок и измерительного прибора. **Все соединительные провода и контрольные точки использовать следует только по назначению, запрещается замыкать выходы контрольных точек, которые не предназначены для этого в данной работе!**
2. Измерьте цифровым мультиметром сопротивления $x_i = R_i$ $n=100$ резисторов. Результаты измерений запишите в таблицу 6 (простой статистический ряд).

Таблица 6

i	1	2	3	…	100
x_i, Ом					

3. Составьте интервальный ряд (табл. 7):

Таблица 7

$x_{i\,min} + x_{i\,max}$, Ом	$\langle x_i \rangle$, Ом	m_i	P_i^*	$\dfrac{P_i^*}{\Delta x_i}$, Ом
…	…	…	…	…

Для составления интервального ряда проделайте следующее:

а) определить максимальное X_{max} и минимальное X_{min} значения среди полученных результатов и разбить диапазон принимаемых значений x_i на k=7-8 одинаковых интервалов с границами $x_{i\,min}$; $x_{i\,max}$. При этом ширина интервалов одинакова и равна $\Delta x_i = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{k}$;

б) рассчитайте $\langle x_i \rangle = \dfrac{(x_{i\,min} + x_{i\,max})}{2}$ для каждого интервала;

в) подсчитайте число m_i значений сопротивлений, попавших в каждый интервал;

г) по формуле $P_i^* = \dfrac{m_i}{n} = \dfrac{m_i}{100}$ определите относительные частоты, соответствующие каждому интервалу;

д) рассчитайте значение выражения $\dfrac{P_i^*}{\Delta x_i}$. Это отношение представляет собой среднюю плотность вероятности $\langle f(x) \rangle$ для интервала $x_{i\,min} \div x_{i\,max}$ (см. выражение (1.4))

4. По полученным расчетным данным построить гистограмму распределения рис. 5.

Рис. 5. Гистограмма распределения.

5. Очевидно, что высота отдельного прямоугольника из гистограммы пропорциональна вероятности обнаружить резистор из числа измеренных, сопротивление которого попадает в интервал значений $[x_{i\,min}, x_{i\,max}]$. Если увеличить число измерений n и уменьшить ширину интервала $[x_{i\,min}, x_{i\,max}]$, равную $\Delta x_i = \frac{X_{max} - X_{min}}{k}$, то огибающая гистограммы перейдет в плавную линию. Эта линия является графиком некоторой функции $f(x)$, что также показано на рис. 5.
6. Используя выражение (1.8), переписанное в виде $M(X) = \langle x \rangle = \sum_{i=1}^{k} P_i^* \cdot \langle x_i \rangle$ по полученным выше результатам, вычислить среднее значение $\langle x \rangle = \langle R \rangle$ (или математическое ожидание случайной величины). Если взять величину интервала $[x_{i\,min}, x_{i\,max}]$ достаточно малой, то средним значением $\langle x_i \rangle$ на интервале можно считать середину интервала:

$$\langle x_i \rangle = \frac{x_{i\,min} + x_{i\,max}}{2} \tag{3.3}$$

7. Перепишем формулу (1.10) для дисперсии D в виде:

$$D = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \langle x \rangle)^2 \cdot P_i^* \tag{3.4}$$

Если ширина интервала $[x_{i\,min}, x_{i\,max}]$ мала, то за x_i можно принять среднее значение $\langle x_i \rangle$ на интервале, рассчитываемое по формуле (3.3).

Тогда среднеквадратичное отклонение случайной величины запишется в виде:

$$\sigma = \sqrt{D} \tag{3.5}$$

8. По формулам (3.4) и (3.5) определить дисперсию D и среднее квадратичное отклонение σ.
9. По полученным значениям $\langle x \rangle$ и σ и используя формулу (1.12) построить график функции распределения (функцию Гаусса) на миллиметровой бумаге.
10. Включите лабораторный модуль в сеть ~220 В.
11. Перевести переключатель СЕТЬ на панели установки в положение «ВКЛ» при этом должны загореться соответствующие сигнальные светодиоды «СЕТЬ». Дать прибору прогреться не менее 5 минут.
12. Установить ручку «ЧАСТОТА» в максимальное положение, вращая её до упора по часовой стрелке и **отжать кнопку «ЭКСПЕРИМЕНТ».**
13. Нажимая кнопку «ИЗМЕРЕНИЕ» провести n=100 измерений частоты генератора и повторить действия, аналогичные пп. 2 — 8. Отметим, что в данном случае распределение может иметь вид отличный от нормального распределения Гаусса.
14. **Нажать кнопку «ЭКСПЕРИМЕНТ»** и приступить к изучению метода наименьших квадратов на примере вольт-амперной характеристики (ВАХ) линейного резистора.
15. Для этого, изменяя ручкой «ТОК РЕЗИСТОРА» ток, протекающий через линейное сопротивление, снять ВАХ элемента, т. е. зависимость $U=U(I)$. При этом для измерения тока и напряжения в каждой точке ВАХ следует нажимать кнопку «ИЗМЕРЕНИЕ». Измеренные значения выводятся на LCD ЖКД индикатор учебного прибора.
16. Занести результаты измерений в таблицу 8.

Таблица 8

I, A	…	…	…
U, B	…	…	…

$R \pm \Delta R$ =...

17. Построить ВАХ резистора по данным таблицы 8 на миллиметровой бумаге в виде экспериментальных точек. Вольт-амперная характеристика должна иметь вид прямой линии.
18. По формулам (2.6) — (2.14) найти оценку A для коэффициента наклона a прямой линии, а также доверительный интервал этой оценки, используя данные в таблице 5 значения коэффициентов Стьюдента. Согласно формуле (3.2) оценка A коэффициента наклона прямой есть значение

сопротивления резистора, т. е. $A=R$.

19. Записать окончательный результат расчетов в виде $a=R\pm t_{\alpha,n-2}\cdot S_A=R\pm\Delta R$.
20. По рассчитанным с помощью метода наименьших квадратов значениям коэффициентов, построить график прямой линии и наложить его на экспериментальные точки.
21. По окончании работы поставьте все переключатели в положение «ВЫКЛ» и выньте вилки из розеток.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какой процесс называется случайным?
2. Что такое случайная величина?
3. Какая величина называется частотой события?
4. Что называется законом распределения случайной величины?
5. Что такое функция распределения случайной величины?
6. Запишите основные свойства функции распределения случай-ной величины.
7. Укажите основные числовые параметры, характеризующие закон распределения случайной величины и объясните их смысл.
8. Что называется математическим ожиданием случайной величины?
9. Дайте определение величины дисперсии.
10. Что называется средним квадратичным отклонением?
11. В чем удобство использования среднего квадратичного отклонения по сравнению с использованием дисперсии?
12. Какова связь между функцией распределения и плотностью распределения?
13. Для каких случайных величин существует плотность распределения — дискретных или непрерывных?
14. Запишите основные свойства плотности распределения.
15. Что такое кривая распределения?
16. Запишите выражение для функции плотности распределения непрерывной случайной величины.
17. Какова вероятность принятия случайной величиной конкретного значения при дискретном распределении? При непрерывном распределении?
18. Как влияет дисперсия случайной величины на форму кривой распределения?
19. Укажите аналог кривой распределения для дискретных случайных величин.
20. Укажите оценку основных параметров распределения.
21. Какая оценка называется точечной?
22. Какая оценка называется несмещённой?
23. Что такое доверительная вероятность или надежность измерения?
24. Как измеряется доверительный интервал для среднего значения измеряемой величины и что он обозначает?
25. В классической физике имеет место классическое распределение Максвелла. Что это за распределение и чем оно отличается от нормального распределения?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. *Глудкин, О. П.* Управление качеством электронных средств : учеб. для вузов / О. П. Глудкин, А. И. Гуров, А. И. Коробов [и др.] ; под ред. О. П. Глудкина. – М. : Высш. шк., 1994. – 416 с.

2. *Смирнов, Н. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – М. : Наука, 1969. – 512 с.

3. *Огвоздин, В. Ю.* Управление качеством : Основы теории и практики : учеб. пособие / В. Ю. Огвоздин. – Изд. 4-е, испр. и доп. – М. : Дело и Сервис, 2002. – 159 с. – ISBN 5-8013-0059-X.

4. *Шор, Я.Б.* Таблицы для анализа и контроля надежности / Я. Б. Шор, Ф. И. Кузьмин. – М. : Сов. радио, 1968. – 288 с.

5. *Николаева, Э. К.* Семь инструментов качества в японской экономике / Э. К. Николаева. – М. : Изд-во стандартов, 1990. –