НПО УЧЕБНОЙ ТЕХНИКИ «ТУЛАНАУЧПРИБОР»

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ЭЦСТ-1

ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ R, L И C.

ЧАСТЬ I

Тула, 2012 г

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ R, L И C.

Цель работы: изучение цепей переменного тока, экспериментальная проверка закона Ома для цепи переменного тока с последовательно соединенным активным сопротивлением, емкостью и индуктивностью, построение амплитудно-частотных характеристик колебательных контуров с последовательным соединением R, L и C.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ
ЧАСТЬ I

ЧАСТЬ I

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ, СОДЕРЖАЩИМ R, L И C.

Электрический колебательный контур.

Колебательная система, использующаяся в радиотехнических устройствах, представляет собой электрическую цепь, состоящую из емкости C, индуктивности L и активного сопротивления R.

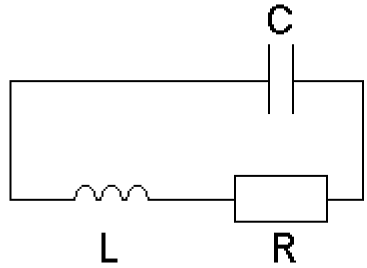


Рис. 1. Электрический колебательный контур.

Наличие сопротивления R обуславливает потери электрической энергии в контуре. Такой контур является затухающим гармоническим осциллятором, для которого справедливо следующее дифференциальное уравнение свободного колебательного процесса:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=0\,, \tag{1.1}$$

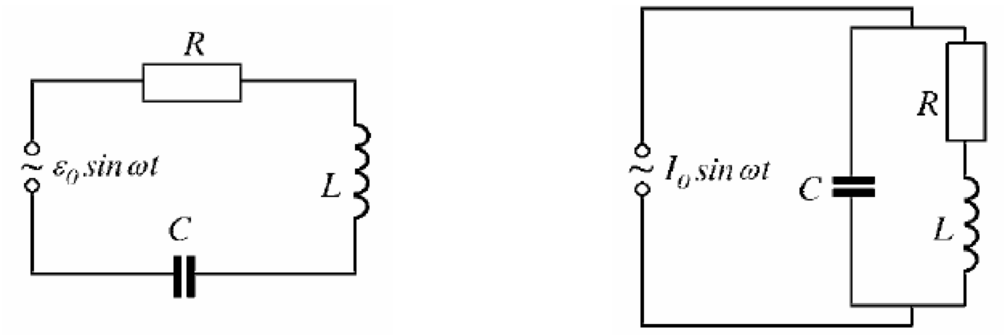
где q – заряд конденсатора, $2\delta=\frac{R}{L}$ (δ - коэффициент затухания контура);

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ - круговая частота свободных электрических колебаний контура.

С течением времени свободный колебательный процесс в контуре будет затухать. Для получения незатухающих колебаний необходимо непрерывно пополнять запас энергии контура, чтобы скомпенсировать потери. С этой целью контур подключается к генератору переменного тока. Незатухающие колебания, возникающие в контуре, называются вынужденными, поскольку их частота определяется частотой генератора. В этом случае дифференциальное уравнение колебательного процесса примет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=F_0\cos\omega t \tag{1.2}$$

В настоящей задаче исследуются вынужденные колебания в колебательном контуре, элементами которого являются конденсатор C , индуктивность L и активное сопротивление R , соединенные последовательно (рис. 1,а) или параллельно (рис. 1,б) с источником питания. При этом в качестве источника питания используется либо генератор переменной ЭДС $\varepsilon=\varepsilon_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$ (рис. 1,а), либо генератор переменного тока $I(t)=I_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$ (рис. 1,б).



а) б)

Рис. 1. Электрические схемы последовательного (а) и параллельного (б) контуров

Последовательное соединение элементов контура.

Рассмотрим электрическую цепь, включающую в себя внешний источник, ЭДС которого меняется по гармоническому закону $\varepsilon=\varepsilon_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$ конденсатор C , индуктивность L и активное сопротивление R (см. рис. 1а). Записывая закон Кирхгофа для этой цепи, получим уравнение вынужденных колебаний в контуре:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=\varepsilon_0\cdot\sin(\omega t) \qquad (1.3)$$

где I - ток, протекающий в контуре; q - заряд на пластине конденсатора; ε_0 - амплитуда напряжения источника ЭДС; ω - частота источника ЭДС. Так как сила тока $I=\frac{dq}{dt}$, то уравнение (1.3) можно записать в следующем виде

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon_0\cdot\sin(\omega t) \qquad (1.4)$$

Разделим обе части уравнения (1.4) на L и введя обозначения

$$\frac{R}{2L}=\delta\,, \qquad \frac{1}{LC}=\omega_0^2 \qquad (1.5)$$

где ω_0 - собственная частота колебательного контура в отсутствие затухания, δ - коэффициент затухания колебаний.

С учетом обозначений (1.5) уравнение (1.4) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cdot \sin \omega t. \qquad (1.6)$$

Для установившихся колебаний решение этого уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$q = q_0 \cdot \sin(\omega t - \theta), \qquad (1.7)$$

где

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \qquad (1.8)$$

$$tg\,\theta = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1.9)$$

Используя выражение (1.7) для ***q***, можно установить закон изменения тока в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \cdot \omega \cos(\omega t - \theta) = q_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \varphi) \qquad (2.0)$$

где $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ - разность фаз между ЭДС и током в цепи, $I_0 = q_0\omega$ - амплитуда колебаний силы тока в цепи а:

$$tg\,\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\delta} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (2.1)$$

С учетом (1.8) можно записать выражение для зависимости амплитуды тока в цепи от частоты ЭДС:

$$I_0 = q_0\omega = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (2.2)$$

Из формулы (2.2) видно, что амплитудное значение силы тока зависит от частоты ω. Рассмотрим полученные результаты подробнее. При ω = 0 амплитуда тока I_0=0. С ростом частоты I_0 возрастает и при $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ амплитуда тока достигает максимального значения $I_{0\max} = \frac{\varepsilon_0}{2\delta L} = \frac{\varepsilon_0}{R}$, разность фаз φ при этом равна нулю. При дальнейшем увеличении частоты I_0 уменьшается, и при $\omega \to \infty$ амплитуда тока $I_0 \to 0$. В итоге зависимость I_0 (ω) имеет вид, представленный на рис. 2 (для двух значений активного сопротивления). Эта зависимость получила название амплитудночастотной характеристики контура.

Из рис. 2 видно, что чем меньше R (меньше коэффициент затухания δ), тем больше I_0 и тем «острее» максимум кривой.

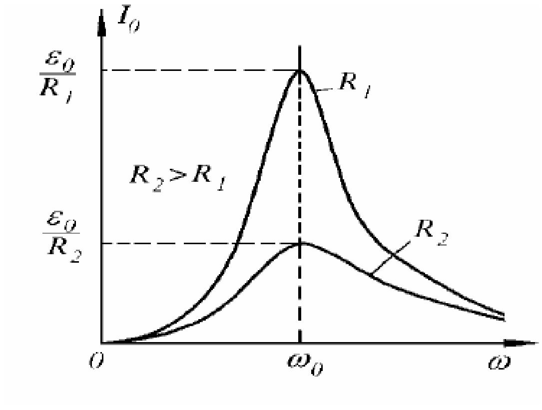


Рис. 2. Зависимость I_0 от частоты ω для двух значений R.

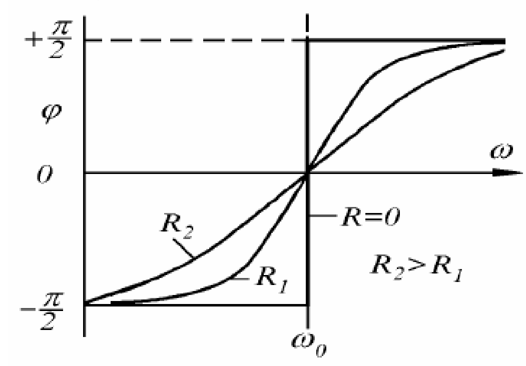


Рис. 3. Зависимость φ от частоты ω для двух значений R.

На рис.3 приведены зависимости разности фаз между ЭДС и током в цепи φ от частоты ω . Видно, что при частотах, близких к нулю, разность близка к $-\frac{\pi}{2}$ (говорят, что напряжение отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$), при больших частотах разность фаз стремится к $+\frac{\pi}{2}$ (напряжение опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$). При частоте $\omega = \omega_0$ разность фаз равна нулю. Из рис.3 видно, что чем меньше R, тем быстрее изменение φ вблизи частоты $\omega = \omega_0$, в предельном случае при R = 0 фаза изменяется скачком при $\omega = \omega_0$.

Найдем теперь зависимость напряжения на конденсаторе $U_C=\frac{q}{C}$ от частоты ω. Так как $q=\int I dt$, то, проинтегрировав выражение (2.0), получим:

$$U_C=\frac{q}{C}=\frac{1}{C}\int I_0 \sin(\omega t-\varphi)\,dt=-\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t-\varphi)=U_{C_0}\sin(\omega t-\varphi_C) \tag{2.3}$$

где

$$U_{C_0}=\frac{\varepsilon_0}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{2.4}$$

– амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе , $\varphi_C=\left(\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)$ - разность фаз между ЭДС и напряжением на конденсаторе. При $\omega=\omega_0$ получим:

$$U_{C_0}=\frac{\varepsilon_0}{\omega_0 CR}\approx\frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{\sqrt{LC}}CR}=\varepsilon_0\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\varepsilon_0\cdot Q, \tag{2.5}$$

где $Q=\frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$ - добротность контура. Значение добротности характеризует величину потерь энергии в контуре - чем меньше потери, тем больше добротность. Из формулы (2.5) видно, что при $\omega = \omega_0$ напряжение на конденсаторе в Q раз больше ЭДС источника. Это явление носит название резонанса напряжений. Можно показать, что амплитуда колебаний напряжения на индуктивности $U_{L_0}=L\frac{dI}{dt}$ при $\omega = \omega_0$ также будет равна $\varepsilon_0 \cdot Q$, но при этом напряжение на индуктивности будет меняться в противофазе с напряжением на конденсаторе.

Из формулы (2.4) можно найти частоту ω_C, при которой напряжение на конденсаторе будет максимальным. Для этого надо решить уравнение $\frac{dU_{C_0}}{d\omega}=0$. После несложных, но громоздких преобразований можно получить:

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0 \qquad (2.6)$$

и

$$U_{C_0}(\omega_C) = \frac{\varepsilon_0}{CR\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \qquad (2.7)$$

При Q>>1 можно записать $\omega_C \approx \omega_0$, а $U_{C_0}(\omega_C)=\varepsilon_0\cdot Q$.

По определению, добротность $Q=\frac{\pi}{\theta}$ где θ - логарифмический декремент затухания свободных колебаний в контуре. В свою очередь, $\theta = \delta T$, где $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$ (затухание мало, поэтому $\omega_0^2 \gg \delta^2$), и после несложных преобразований можно получить формулу $Q=\frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Также для добротности часто приводят формулу $Q=2\pi\cdot\frac{W}{\Delta W}$, где W- энергия, запасенная в контуре, ΔW — потери энергии в контуре за период колебаний.

Таким образом, измеряя напряжение на конденсаторе на резонансной частоте, можно определить добротность контура Q. На рис. 4 приведен вид зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты ЭДС внешнего источника.

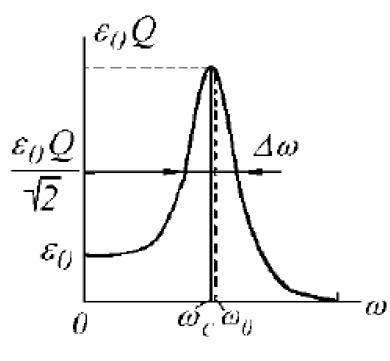


Рис. 4. Вид резонансной кривой для напряжения на конденсаторе.

При $\omega = 0$ $U_{C0} = \varepsilon_0$, по мере увеличения частоты U_{C0} растет и при $\omega=\omega_0$ достигает своего максимального значения $(U_{C_0})_{max}\approx\varepsilon_0\cdot Q$ после чего начинается монотонное убывание напряжения до нуля. Обратим внимание на тот факт, что частота ω_C , при которой амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе максимальна, несколько меньше частоты ω_0 , для которой максимальна амплитуда силы тока.

Обычно вводится понятие ширины резонансной кривой $\Delta\omega$ - это диапазон частот, для которых амплитуда напряжения отличается от амплитуды напряжения в резонансе не более, чем в $\sqrt{2}$ раз.

Можно показать, что для $\Delta\omega \ll \omega_0$ справедливо соотношение $\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}$ или $Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Таким образом, определяя ширину резонансной кривой, можно также найти добротность контура Q.

График зависимости разности фаз между напряжением источника ЭДС и напряжением на конденсаторе будет иметь такой же вид, как на рис. 3, только «приподнятый» на $\frac{\pi}{2}$, т. к. $\varphi_C=\varphi+\frac{\pi}{2}$. Иными словами, в точке резонанса, когда ток и напряжение источника совпадают по фазе, напряжение на конденсаторе будет отставать по фазе от напряжения источника на $\frac{\pi}{2}$.

Напряжение на конденсаторе всегда (а не только при резонансе) отстает по фазе от тока, протекающего через конденсатор, на $\frac{\pi}{2}$, в свою очередь, напряжение на индуктивности всегда опережает по фазе ток на $\frac{\pi}{2}$.